CONVERGÊNCIA DE SÉRIES NUMÉRICAS USANDO AS TÉCNICAS DO CÁLCULO INFINITESIMAL

LUIZA SOUZA DE PAULA[1]; JANICE NERY[3]

[1]Universidade Federal de Pelotas – luiza.svp@live.com
[3]Universidade Federal de Pelotas – janice@mat.ufrgs.br

1. INTRODUÇÃO

Este é um trabalho inserido nas áreas de conhecimento de Cálculo e Análise Matemática e cujo objetivo é introduzir a técnica do Cálculo Infinitesimal para o estudo da convergência de séries numéricas. Esta técnica mostra a sua eficiência e importância principalmente nas situações em que os testes de convergência tais como o da Raiz, Razão, Raabe, Logarítmo, entre outros, se tornam inconsistentes ou encontramos dificuldades com o teste por comparação imediata, em magnitude, com outras séries numéricas cuja convergência já é conhecida.

Num primeiro momento estudamos a convergência das séries de Riemann e de Bertrand, que são famílias de séries clássicas padrões importantes para o efeito de comparação.

Num segundo momento fazemos uma introdução às técnicas do Cálculo Infinitesimal, para o estudo de convergência de sequências e de séries de números reais.

Neste trabalho não temos por objetivo esgotar o estudo desta técnica e sim introduzi-la. Em sua amplitude, esta técnica do Cálculo Infinitesimal estudando infinitudes, infinitésimos e infinitamente grandes, é bastante poderosa se aplicada, por exemplo, ao cálculo de limites, estudo de assíntotas horizontais, verticais e oblíquas de funções reais e de variável real, ao estudo de convergência de integrais e ao estudo de convergência de sequências e séries, como mencionamos anteriormente.

Neste desenvolvimento também apresentamos uma tabela de equivalências assintóticas de algumas sequências tabeladas e um cálculo operacional das equivalências assintóticas.

Como nos cursos de Cálculo nem todos os resultados teóricos são demonstrados, neste trabalho fazemos todas as demonstrações, inclusive as de alguns resultados clássicos. O objetivo é atingir um patamar mais elevado, conduzindo a uma compreensão mais ampla da teoria. Neste sentido, e também levando em consideração a não abordagem da técnica do Cálculo Infinitesimal nos cursos de graduação, este trabalho engrandece a formação de um graduando.

2. METODOLOGIA

Este trabalho foi realizado no primeiro semestre de 2015 e foi motivado no segundo semestre de 2014, por ocasião da monitora da disciplina de AlGA. Foi bastante inovador, tanto no sentido do envolvimento com as demonstrações dos resultados teóricos, não abordados nos cursos de Cálculo, como também, pela inserção de uma técnica do Cálculo Infinitesimal que embora seja bastante poderosa e razoavelmente simples, também não está inserida atualmente nos cursos de Cálculo.

O trabalho se iniciou, com detalhes, com as definições e teoremas clássicos vinculados ao tema das séries numéricas e após, com estes resultados realizamos, também com detalhes, o estudo da convergência das famílias das séries clássicas, de Riemann e de Bertrand.

Concluído este estudo teórico, foi possível o estudo da abordagem do Cálculo Infinitesimal, como ferramenta matemática, para analise da convergência de séries numéricas.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Começamos com a definição de série de números reais e sua convergência, explorando alguns exemplos clássicos tais como a convergência das séries $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$,$\sum_{n=0}^{\infty} n$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ e a série harmônica, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Após provamos que para a convergência de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, não importa a partir de qual parcela começamos a somar, motivo pelo qual, nesta situação de convergência, passamos a escrevê-la apenas na forma $\sum a_n$.

Enfatizamos que este trabalho diz respeito à convergência de séries numéricas de termos não-negativos utilizando as técnicas do Cálculo Infinitesimal e, para a sua concretização, desenvolvemos:

- Alguns resultados clássicos da convergência de séries numéricas tais como, o Critério da Comparação, o Critério do Logarítimo e o Critério da Integral
- Convergência das famílias de séries padrões de Riemann ($\sum\frac{1}{n^{\propto}}$) e de Bertrand ($\sum\frac{1}{n^{\propto}\ \ln n^{\beta}}$)
- Estudo de sequência equivalentes: Conceito, Tabela de Equivalências Assintóticas e Cálculo Operacional da Equivalência Assintótica
- Teorema da Comparação Assintótica
- Aplicação: exemplos ilustrativos

Aqui, nesta apresentação deste trabalho, nos limitaremos à definição de sequências equivalentes e a enunciar os três resultados que julgamos essenciais e faremos um exemplo ilustrativo.

Definição

Duas sequências $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são ditas equivalentes, se $\lim_{n\to\infty}\frac{an}{bn} = 1.$

Notação: $a_n \sim b_n$

Teorema 1

Consideremos a família das séries de Riemann $\sum\frac{1}{n^{\propto}}$, $\propto\in \boldsymbol{R}.$

Então:

$\sum\frac{1}{n^{\propto}}$ converge, se $\propto > 1$

$\sum\frac{1}{n^{\propto}}$ diverge, se $\propto \leq 1$

Teorema 2

Consideremos as séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n^{\propto} \ln n^{\beta}}$, $\propto, \beta \in \boldsymbol{R}$.

Então:

$\sum \frac{1}{n^{\propto} \ln n^{\beta}}$ converge, se $\propto > 1$;

$\sum \frac{1}{n^{\propto} \ln n^{\beta}}$ diverge, se $\propto < 1$.

Sendo $\propto = 1$: $\sum \frac{1}{n^{\propto} \ln n^{\beta}} = \sum \frac{1}{n \ln n^{\beta}}$ e converge se $\beta > 1$ e diverge se $\beta \leq 1$.

Teorema 3: Teorema da Comparação Assintótica

Sejam as séries de termos não-negativos $\sum a_n$ e $\sum b_n$, tais que seus termos genéricos a_n e b_n são equivalentes. Então:

$\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

No que segue apresentaremos um exemplo ilustrativo, que a solução através dos testes convencionais poderia apresentar dificuldades.

Exemplo 1

Estude a convergência da série numérica $\sum \frac{\ln(2+n)}{\ln(1+n)} - 1$

Solução

Escrevemos $a_n = \frac{\ln(2+n)}{\ln(1+n)}$ -1, e observamos que esta é uma série de termos positivos já que $a_n = \frac{\ln(2+n)}{\ln(1+n)} = \frac{\ln(2+n) - \ln(1+n)}{\ln(1+n)}$, onde o numerador e o denominador desta fração são positivos.

Ainda, $a_n = \frac{\ln(2+n)}{\ln(1+n)}$ -1 $= \frac{\ln(2+n) - \ln(1+n)}{\ln(1+n)} = \frac{\ln(\frac{2+n}{1+n})}{\ln(1+n)} = \frac{\ln(1+(\frac{2+n}{1+n}-1))}{\ln(1+n)} = \frac{\ln(1+\frac{1}{1+n})}{\ln(1+n)} \sim \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln n} \sim \frac{\frac{1}{n}}{\ln n} = \frac{1}{n \ln n}$.

Como a série, $\sum \frac{1}{n \ln n}$ é série de Bertrand, $\sum \frac{1}{n^{\propto} \ln n^{\beta}}$, com $\propto = 1$ e $\beta = 1$ e, portanto, diverge, segue que a série dada diverge.

4. CONCLUSÕES

A importância deste trabalho se dá nos seguintes aspectos fundamentais:

- Oportunidade de envolvimento com os resultados teóricos utilizados no Cálculo, na solução de problemas que envolve a convergência de séries numéricas.
- Iniciação às técnicas do Cálculo Infinitesimal, que é bastante ampla e poderosa, ao estudo da convergência de séries numéricas onde, mais uma vez enfatizamos, teoria esta, que já se insere nos cursos de Análise Matemática, e que não é contemplada nos cursos de graduação.
- Oportunidade de familiarização com o Latex, para a edição de textos científicos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REY PASTOR, J. et al. **Análisis matemático.** Buenos Aires: Editorial Kapelusz, 1952. 1v.

SPIVAK, M. **Cálculus – Cálculo Infinitesimal.** Barcelona: Editorial Reverté, 1970.

FULKS, W. **Advanced Calculus – An Introduction to Analysis.** Oregon: Jonh Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney: 1961.

PORTO DA SILVEIRA, J.F. **Notas de curso ministrado na UFRGS.** Porto Alegre, RS, 1993.

DACORSO NETTO, C. **Elementos de cálculo infinitesimal.** São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional: 1973.