UMA INTRODUÇÃO A TEORIA DE CATEGORIAS.

C. GARCIA, CHRISTIAN M.[1]; V. PIEPER, CHRISTIAN R.[2]; MORGADO, ANDREA[3]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – chrismic@uol.com.br*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – christian.mat2012@hotmail.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – andrea.morgado@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

A teoria de categorias surgiu na década de 1940 nos trabalhos em topologia de S. Mac Lane e S. Eilenberg. Basicamente, uma categoria consiste de uma classe de objetos e uma classe de morfismos que satisfazem determinadas condições (ver Definição 3.1). A teoria de categorias permitiu vários avanços em álgebra homológica e topologia algébrica. Atualmente, a linguagem categórica vem sendo utilizada em outras áreas da matemática, devido a sua grande capacidade de generalização, o que torna possível descrever diferentes estruturas, como, por exemplo, na área de Álgebra Abstrata, conjuntos, grupos, espaços vetoriais, anéis, etc.

Um exemplo desta generalização é a definição categórica de um grupóide. Originalmente, a noção de grupóide apareceu em 1926 nos trabalhos de H. Brandt. A versão algébrica que usaremos aqui provém dos trabalhos de M. Lawson, e é uma natural extensão da noção de grupos. É provado que a definição algébrica de grupóide (ver Definição 3.2) é equivalente a definir um grupóide como uma categoria pequena, na qual todo morfismo é invertível. Nesta nova linguagem categórica, alguns resultados são obtidos diretamente da definição, o que não ocorre na definição algébrica, pois precisam ser demonstrados.

Neste trabalho temos por objetivo apresentar algumas definições e exemplos dentro da Teoria de Categorias. Como uma aplicação da capacidade de generalização desta nova linguagem, demonstraremos a equivalência entre as definições algébrica e categórica de grupóide. Com isso, vamos mostrar que determinadas propriedades sobre grupóides seguem direto da definição categórica, mas precisam ser demonstradas algebricamente se usarmos a definição algébrica (Ver Proposição 3.3).

2. METODOLOGIA

A metodologia utilizada pelo grupo consiste em pesquisas em livros, teses, jornais e revistas na área de Álgebra Abstrata. A partir disso, tópicos são escolhidos e divididos para que semanalmente cada discente pertencente ao grupo apresente, em formato de seminário, o assunto pelo qual o mesmo ficou responsável.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Seguindo S. MacLane, um grafo é dado por um conjunto de objetos O e um conjunto de flechas (morfismos) A, munido de duas funções dadas por:

$$A \xrightarrow{dom} O \quad \text{e} \quad A \xrightarrow{cod} O.$$

Neste grafo, o conjunto de pares combináveis de morfismos é o conjunto:

$$A \times_O A = \{(g, f); g, f \in A \text{ e } domg = codf\}.$$

Neste contexto, podemos definir nosso principal objeto de estudo:

Definição 3.1 [MACLANE, 1971]**:** Uma *categoria* é um grafo com duas funções adicionais:

$$\begin{array}{lll} id: O \to A & \text{e} & \circ: A \times_O A \to A \\ \quad c \to 1_c & & \quad (g, f) \to g \circ f \end{array}$$

Além disso, essas funções satisfazem as seguintes propriedades:

(1) Para quaisquer $f, g, h \in A$, vale que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ *(associatividade)*;

(2) Para quaisquer $f: a \to b$ e $g: b \to c \in A$, vale que $1_b \circ f = f$ e $g \circ 1_b = g$ *(lei da unidade)*.

Para quaisquer objetos $c, d \in O$ definimos o conjunto:

$$\hom(c, d) = \{f \in A;\ domf = c \ e \ codf = d\}.$$

Podemos mostrar que dado um objeto $a \in O$, então o morfismo $1_a: a \to a$ é único. Sendo assim, identificamos os elementos da categoria com suas respectivas flechas identidade.

Ainda seguindo MacLane, dizemos que um conjunto X é *pequeno* se existir um conjunto U, chamado universo, tal que X é um membro desse conjunto. Com isso, podemos construir um primeiro exemplo de categorias, a qual denominamos como a categoria Set, tal que os objetos são todos os conjuntos pequenos e os morfismos são todas as funções entre estes. A partir desta mesma construção, temos outros exemplos de categorias, dados por:

1. Grp: Os objetos são grupos e os morfismos são os homomorfismos entre grupos;
2. Rng: Os objetos são anéis e morfismos os homomorfismos de anéis.

De acordo com MacLane, uma categoria é dita *categoria pequena* se a classe dos objetos forma um conjunto e a classe dos morfismos também. Neste contexto, definimos um *grupóide* como sendo uma categoria pequena, na qual todo morfismo é invertível, ou seja, para todo morfismo $f \in hom(b,c)$ existe um morfismo $g \in hom(c,b)$, tal que $f \circ g = 1_c$ e $g \circ f = 1_b$.

Vamos mostrar a equivalência entre a definição categórica de grupóide e a definição algébrica, a qual é dada a seguir.

Definição 3.2 [LAWSON, 1998]: Seja G um conjunto não vazio equipado com uma operação binária definida parcialmente. Se $g,h \in G$, escrevemos $\exists gh$, sempre que o produto gh estiver definido. Dessa forma, o conjunto G é dito um *grupóide,* se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Para quaisquer $g,h,l \in G$, $\exists g(hl)$ se, e somente se $\exists (gh)l$ e, neste caso, $g(hl) = (gh)l$;

(ii) Para quaisquer $g,h,l \in G$, $\exists g(hl)$ se, e somente se, $\exists gh$ e $\exists hl$;

(iii) Para todo $g \in G$, existem únicos elementos $r(g), d(g) \in G$, tais que $\exists r(g)g$, $\exists gd(g)$ e, neste caso, $r(g)g = g = gd(g)$;

(iv) Para todo $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$, tal que $r(g) = gg^{-1}$ e $d(g) = g^{-1}g$.

Um elemento $e \in G$ é chamado uma identidade se $\exists eg$ e $\exists ge$ e, neste caso, $eg = g = ge$. O conjunto das identidades em G será denotado por G_0.

A idéia por trás da demonstração consiste em primeiramente considerar uma categoria C em que todo morfismo é invertível, e dessa forma a composição é uma operação definida parcialmente em A, pois considerando morfismos $f \in \hom(a,b)$ e $g \in \hom(c,d)$, então $g \circ f$ está definida se, e somente se, $b = c$. Os objetos de C são identificados como as identidades do grupóide. O fato da categoria C gozar da propriedade associativa garante os itens (*i*) e (*ii*) referentes a definição 3.2. A lei das unidades e o fato de todo mofismo possuir um morfismo inverso garantem os itens (*iii*) e (*iv*), respectivamente.

Reciprocamente, seja G um grupóide no sentido algébrico, então o conjunto das identidades G_0 serão os objetos da categoria. Para quaisquer $e,f \in G_0$, definimos $\hom(e,f) = \{g \in G; r(g) = f \text{ e } d(g) = e\}$, ou seja, os morfismos são todos elementos $g \in G$ tais que $\exists fge$. Se $e,f,l \in G_0$, então a operação do grupóide será a composição:

$$\begin{array}{rcl} \hom(e,f) \times \hom(f,l) & \to & \hom(e,l) \\ (g,h) & \to & h \circ g = hg. \end{array}$$

Dessa forma, a associatividade do grupóide garante o item (1) da definição categórica, e (2) é satisfeito a partir da propriedade (iii) da definição algébrica e, como cada elemento de G possui inverso, a exigência da existência de morfismos inversos é satisfeita. Portanto as duas definições são equivalentes.

Como uma aplicação dessa equivalência, temos o lema abaixo o qual visto no sentido algébrico necessita ser demonstrado, entretanto, na linguagem categórica não necessita de demonstração, pois seus resultados seguem diretamente da definição.

Proposição 3.3 [FLÔRES, PAQUES, 2014]: Seja G um grupóide. Então, as seguintes propriedades são válidas:

(i) Para todo $g \in G$, o elemento $g^{-1} \in G$ satisfazendo $g^{-1}g = d(g)$ e $gg^{-1} = r(g)$ é unicamente determinado;

(ii) Para todo $g \in G$, $d(g^{-1}) = r(g)$ e $r(\, g^{-1}) = d(g)$;

(iii) Para todo $g \in G, (\, g^{-1})^{-1} = g$;

(iv) Para todo $g, h \in G,\ \exists gh$ se, e somente se, $d(g) = r(h)$;

(v) Para todo $g, h \in G, \exists h^{-1}g^{-1}$ se, e somente se, $\exists gh$ e, neste caso, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$;

(vi) Se $\exists gh$, então $d(gh) = d(h)$ e $r(gh) = r(g)$;

(vii) Para todo $e \in G_0$, $d(e) = r(e) = eee^{-1} = e$.

4. CONCLUSÕES

A partir do estudo que vem sendo realizado pelo grupo foi possível identificar claramente a contribuição da linguagem categórica e também a relevância no que diz respeito as generalizações da teoria grupos. Dessa forma, o trabalho vem sendo de grande produtividade, pois possibilita os alunos envolvidos familiarizarem-se com pesquisas na área de Matemática. O projeto visa como próxima etapa aprofundar-se mais na teoria de Categorias. Após isso, iremos pesquisar teoria de Módulos, a qual necessitará dos resultados vistos até agora na pesquisa.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MACLANE, S. **Categories for the Working Mathematician.** New York: Springer, 1971.

LAWSON M. V. **Inverse Semigroups.** New Jersey: World Scientific, 1998.

FLÔRES, D.; PAQUES, A. Duality for Groupoid (Co)Actions. **Communications in Álgebra**, v.42, p.637-663, 2014.