TEOREMA DISCRETO DE GAUSS BONNET

LUCAS SOARES PRIEBE[1]; GIOVANNI DA SILVA NUNES[2]
LISANDRA SAUER[3]

[1]Lucas Soares Priebe– lucassoarespriebe@hotmail.com
[2]Giovanni da Silva Nunes(orientador)–giovanni.nunes@ufpel.edu.br
[3]LisandraSauer(co-orientador)– lisandra.sauer@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é estudar o teorema de Gauss Bonnet em superfícies poliédricas, a qual relaciona um elemento topológico, que é a característica de Euler-Poincaré, com elementos geométricos. Este resultado, para superfícies diferenciáveis, é bastante conhecido e consta em livros clássicos de Geometria Diferencial. Para o caso onde a superfície é poliédrica, a qual é não diferenciável, se tomou conhecimento em 1998, quando Polthier e Schimes, publicaram um artigo que aborda conceitos da Geometria diferencial para os casos não diferenciáveis. Esta abordagem ocorre de forma bem natural e varias destas definições são estendidas para o caso já conhecido. Nosso trabalho consiste em fazer os detalhes desta abordagem e escrever o assunto da forma mais autônoma possível, para que um aluno de graduação que ainda não possua o pré-requisito do Cálculo Diferencial seja capaz de compreendê-lo. Salientamos que para formalizar tal teoria é necessário adaptar várias definições existentes para situações que sejam mais abrangentes, sem perder o sentido original na essência da sua definição. Portanto, os primeiros resultados esperados se resumem a estas adaptações teóricas e a compreensão destes novos conceitos, que são de grande valor para áreas científicas como Matemática e Ciência da Computação.

2. METODOLOGIA

A metodologia adotada foi a pesquisa em um livro e artigo da área ver [1], [2] e [3] associado a encontros periódicos para discussão dos tópicos estudados e apresentados em seminários.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O teorema de Gauss Bonnet relaciona curvaturas de uma superfície com sua Topologia. Em nosso trabalho, iremos tratar apenas de superfícies poliédricas limitadas, as quais são definidas como sendo uma reunião de uma quantidade finita de polígonos planos, que chamaremos de faces, tais que:

a) Cada lado de polígono está no máximo em dois polígonos;
b) Havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, chamada de bordo.

As superfícies poliédricas que tem bordo serão chamadas de abertas, e as que não têm chamaremos de fechadas.

Estas superfícies poliédricas apresentam elementos geométricos importantes, tais como, ângulo total em um ponto, curvatura de Gauss, curvatura geodésica discreta e curvatura de Gauss parcial.

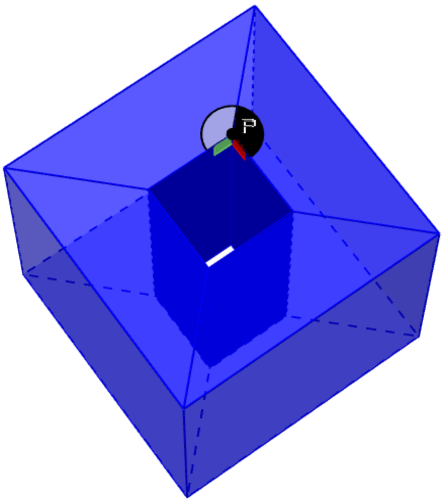
Iremos agora definir o ângulo total em p, que denotaremos por $\theta(p)$.Sejam S uma Superfície poliédrica, $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$ e $F = \{fi\}$ o conjunto de faces em S sendo n o número de faces, e $p \in S$ tal que $p \ \notin \ \partial S \ (bordo\ de\ S)$ .Temos que

$$\theta(p) = \begin{cases} 2\pi, & se\ p\ não\ é\ um\ vértice \\ \sum_{i=1}^{n} \theta i(p), & se\ p\ é\ um\ vértice \end{cases}$$

Onde $\theta_i(p)$ é a medida do ângulo interior formado pelas arestas de fi no vértice p.

Exemplo. Seja p um vértice do toro poliédrico indicado na figura. Temos 4 faces que contém p, logo:

$$\theta(p) = \ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \ \ \Longrightarrow \theta(p) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$



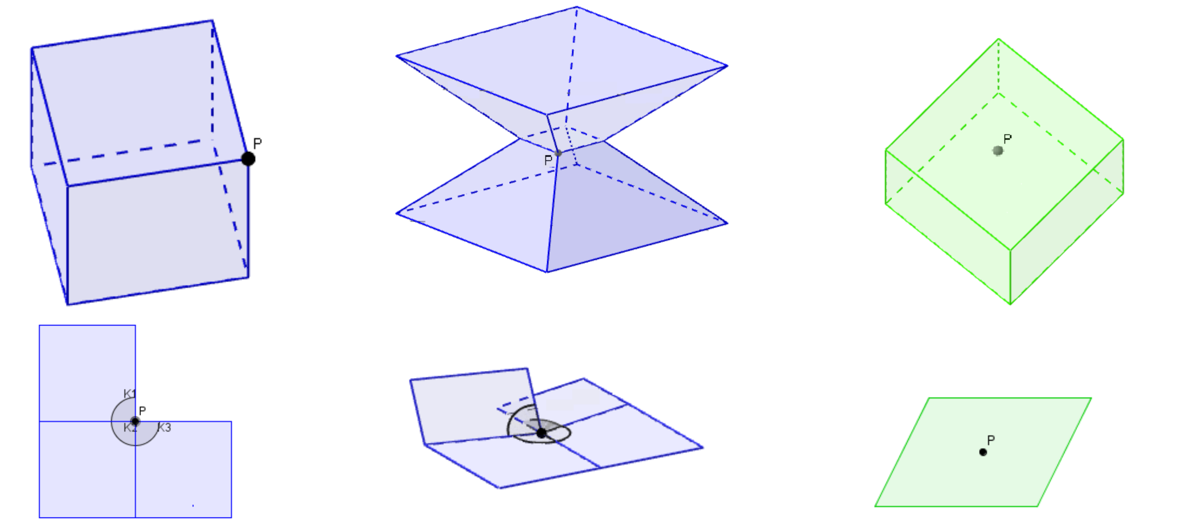
Agora com a noção de ângulo total, podemos definir a curvatura em ponto de uma superfície poliedral fechada. Assim, a curvatura de Gauss $K(p)$ de um ponto p é dada por

$$K(p) = 2\pi - \theta(p)$$

$$K(p) = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \theta i(p)$$

Observe que a curvatura mede o quanto o ângulo total em p, $\theta(p)$, difere de 2π. Logo podemos classificar os pontos de uma superfície poliédrica em:

i) esférico: se $K(p) > 0$
ii) hiperbólico: se $K(p) < 0$
iii) euclidiano: se $K(p) = 0$



(Esférico, $K(p) > 0$) (Hiperbólico, $K(p) < 0$) (Euclidiano, $K(p) = 0$)

Quando consideramos uma curva γ (linha poligonal) ao longo de uma superfície S, podemos calcular outro tipo de curvatura discreta em pontos desta curva, da seguinte forma: tomamos $\theta(p)$ o ângulo total em um ponto p e β um dos ângulos laterais de γ em p. Assim,

$$Kg = \frac{2\pi}{\theta(p)}\left(\frac{\theta(p)}{2} - \beta\right)$$

é a curvatura geodésica discreta em p . Note que,se escolhermos o outro ângulo lateral de γ em p, temos que Kg apenas muda de sinal.

Na medida em que $\Omega \subset S$ é um domínio em uma superfície poliédrica com $\Gamma = \partial\Omega$, a curvatura de Gauss pode ser estendida a pontos de Γ considerando $\theta(p)$ o ângulo total em um vértice p e $\beta(p)$ o ângulo interno da curva no vértice $p \in \Gamma$, chamaremos de curvatura de Gauss parcial de Ω em p e denotaremos por $K_{|\Omega}$ ao produto

$$K_{|\Omega}(p) = \frac{\beta}{\theta} k(p)$$

Trataremos agora, do elemento topológico, que é a característica de Euler-Poincaré.

Sejam V, A e F o número de vértices, arestas e faces, respectivamente, de uma superfície Ω. A expressão V-A+F é chamada de característica de Euler-Poincaré e denotada por $\chi(\Omega)$, a qual é um invariante topológico, ou seja, superfícies poliédricas que são homeomorfos (quando existe uma aplicação contínua cuja inversa também é contínua.) possuem mesma característica.

Esta expressão descreve a característica da superfície, em outras palavras, a quantidade de “buracos” que esta superfície possui. Por exemplo, as superfícies que não possuem buracos tem $\chi(\Omega) = 2$, as que possuem um buraco $\chi(\Omega) = 0$, dois buracos $\chi(\Omega) = -2$, e assim por diante.

A partir de agora temos os pré-requisitos necessários para enunciar o teorema.

Teorema Discreto de Gauss Bonnet. Sejam S uma Superfície poliédrica e $\Omega \subset S$ um domínio com bordo Γ e $\chi(\Omega)$ a característica de Euler-Poincaré . Assim, a equação

$$\sum_{p\in\Omega} K(p) + Kg(\Gamma) = 2\pi\chi(\Omega)$$

onde a curvatura total de Gauss em Ω inclui a curvatura de Gauss parcial em pontos do bordo.

4. CONCLUSÕES

Apesar do estudo da Geometria em Superfícies poliédricas não ser comum na leitura de livros didáticos de nível superior concluímos que pode ser facilmente desenvolvida e aplicada.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] LIMA, E. L.; CARVALHO P. C.; WAGNER E.; MORGADO A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Solgraf Publicações Ltda, 1999.

[2] LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998

[3] POLTHIER, K; SCHIMES, M. Straightest Geodesics on Polyhedral Surfaces. Mathematical Visualization, **Mathematical Visualization**, Ed: H.C. Hege Springer Verlag p. 1-15, 1998