OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA A VIGAS BIDIMENSIONAIS

DANIELA DALLA CHIESA[1]; REJANE PERGHER[2]; VALDECIR BOTTEGA[3]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – ddchiesa@hotmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – rejane.pergher@gmail.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – vldcirbo@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

A otimização da topologia de estruturas vem se desenvolvendo rapidamente nas duas últimas décadas, isso é evidenciado pelo grande número de trabalhos desenvolvidos. A aplicação da otimização topológica é verificada nas mais diversas áreas, como nas engenharias e na robótica entre outros, o que fundamenta a escolha desde tema como objeto de estudo.

O presente trabalho visa mostrar como a otimização topológica pode ser utilizada na distribuição de material em vigas, sujeitas a diferentes suportes e carregamentos, indicando, assim, suas várias possibilidades de aplicação. Um modelo simplificado de viga bidimensional é escolhido e a partir desse domínio de referência fixo procura-se encontrar a melhor distribuição de densidade, que retorne a uma configuração ótima, que minimize a flexibilidade da viga e que atenda a uma restrição de volume imposta.

Após discretizar o domínio de referência fixo em um número finito de subdomínios, denominados elementos finitos, é formulado o problema de otimização topológica utilizando o modelo de material SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*). Para obter a configuração ótima foram utilizados dois métodos heurísticos: o método do critério ótimo e o filtro de sensibilidades. O método do critério ótimo é aplicado para atualizar as densidades dos elementos finitos e o filtro de sensibilidade é utilizado para evitar que possíveis instabilidades numéricas venham a ocorrer. As simulações numéricas foram efetuadas com a utilização do *software matlab.*

2. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A otimização topológica pode ser definida como um método computacional capaz de distribuir dois ou mais materiais dentro de um domínio de referência fixo, a fim de encontrar a ótima configuração que satisfaça alguma restrição pré-estabelecida e que extremize a função objetivo em estudo. Com a otimização topológica pode-se utilizar estruturas sem qualquer forma pré-determinada o que garante a ela uma grande capacidade para encontrar *layouts* inovadores e de alta performance (LIU; TOVAR, 2014).

Na maioria dos problemas de distribuição de densidades considera-se dois materiais: o material sólido e o vazio. Esses problemas são formulados por uma função discreta em que só é possível definir a presença ou a ausência de material, configurando um problema binário 1-0, onde 1 representa a presença de material sólido e 0 indica o vazio.

A otimização topológica discreta é um problema não convergente e, uma das formas de alcançar a solução é proceder com a substituição de variáveis discretas por variáveis contínuas e na sequência introduzir alguma forma de penalização que faça com que as variáveis retornem para a solução discreta (BENDSOE;

SIGMUND, 1999). A introdução dessas variáveis contínuas se dá pela escolha de um modelo de material. Na literatura dois modelos de materiais são bastante difundidos, o modelo de material baseado na homogeneização (ver BENDSOE; KIKUCHI (1988)) e o modelo de material conhecido por SIMP.

O SIMP surge como um modelo de material alternativo e mais simples do que o método da homogeneização. O SIMP define o valor da propriedade do material em cada ponto do domínio de referência fixo em função de uma pseudodensidade e da propriedade do material base utilizado.

2.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE MÍNIMA FLEXIBILIDADE

O objetivo desde trabalho é encontrar a melhor distribuição de densidade que respeite uma restrição de volume e que minimize a flexibilidade da estrutura. Utilizando o método de elementos finitos, para discretizar o domínio de referência fixo, pode-se formular o problema de mínima flexibilidade, utilizando o modelo SIMP, por (BENDSOE; SIGMUND, 2003):

$$\text{encontrar } x_e,$$
$$\text{que minimize } c(x_e) = f^T u,$$
$$\text{sujeito a: } \sum_{e=1}^{ne} v_e x_e = \eta V_0,$$
$$0 < x_{\min} \leq x_e \leq 1,$$

onde u é o vetor de deslocamento global que resolve:

$$\sum_{e=1}^{ne} x_e^p k_e u = f,$$

x_e é a densidade relativa do elemento finito, c é a função objetivo que representa a flexibilidade, f é o vetor de carregamento global, ne é o número total de elementos finitos da malha, v_e é o volume do elemento finito, η é a fração de volume, V_0 é o volume total do domínio de referência fixo, $x_{\min}$ é o valor mínimo admissível para as variáveis de projeto, k_e é a matriz de rigidez do elemento finito e p é o coeficiente de penalização.

2.2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE MÍNIMA FLEXIBILIDADE

A fim de resolver o problema de otimização apresentado é necessário optar por algum método numérico que atualize as variáveis de projeto e por uma técnica que evite algumas instabilidades[1] numéricas que podem surgir no problema.

O método bastante clássico para os problemas de otimização topológica que atualiza as variáveis de projeto é o Critério Ótimo. A formulação do critério ótimo parte do princípio que as restrições $x_{\min} \leq x_e \leq 1,$ estão inativas e que a convergência é alcançada quando a condição de estacionaridade do

[1] Para mais detalhes consultar SIGMUND; PETERSSON (1998).

Lagrangeano é satisfeita (LIU; TOVAR, 2014). Um esquema de atualização heurístico para x_e é dado por:

$$x_e^{novo} = \begin{cases} \max(x_{\min}, x_e - m) \text{ se } x_e B_e^{\xi} \le \max(x_{\min}, x_e - m), \\ x_e B_e^{\xi} \text{ se } \max(x_{\min}, x_e - m) < x_e B_e^{\xi} < \min(1, x_e + m), \\ \min(1, x_e + m) \text{ se } \min(1, x_e + m) \le x_e B_e^{\xi}, \end{cases}$$

onde x_e^{novo} é a variável de projeto atualizada, m é o limite móvel positivo, ξ é o coeficiente de amortecimento e B_e é encontrado resolvendo a seguinte equação:

$$B_e = \left(\frac{p(x_e)^{p-1} u_e^T k_e u_e}{\lambda v_e} \right)$$

em que u_e é o deslocamento do elemento finito e λ é o multiplicador de Lagrange associado a restrição de volume. O multiplicador de Lagrange pode ser determinado por um método de biseccionamento (SIGMUND, 2001).

Com a finalidade de evitar as instabilidades numéricas foi utilizado o filtro de sensibilidade. O filtro de sensibilidade é uma técnica heurística que visa alterar a sensibilidade da função objetivo ou das restrições, em relação a um determinado elemento finito, através da média ponderada da sensibilidade de elementos finitos situados numa vizinhança fixa. Detalhes sobre a aplicação do filtro de sensibilidade, assim como outras técnicas de filtragem, podem ser obtidos em SIGMUND (2007).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As Figuras 1, 2 e 3 apresentam algumas configurações topológicas obtidas, considerando diferentes suportes e aplicações de forças em uma viga. Os resultados ótimos foram obtidos com o auxílio do *software matlab* e o algoritmo numérico utilizado foi fortemente baseado no trabalho de SIGMUND (2001).

Em todas as simulações foi utilizado o aço, cujo o módulo de elasticidade corresponde a $6{,}8\text{x}10^{10}$ *N/m²* e o coeficiente de Poisson cujo o valor é igual a 0,36. Ainda optou-se por uma malha regular com elementos finitos retangulares com 4 pontos nodais, localizados nos seus vértices, e utilizou-se p igual a 3,125.

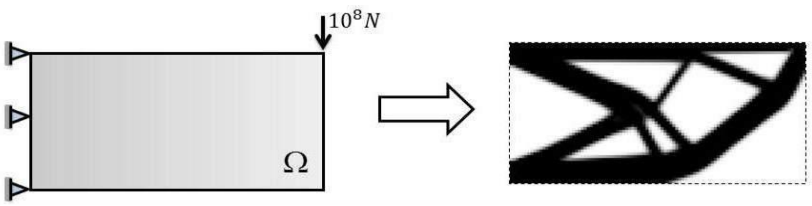

Figura 1: Simulação 1: Domínio de referência fixo (esquerda) e viga otimizada (direita).

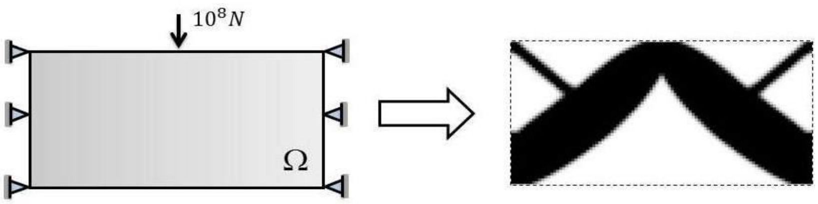

Figura 2: Simulação 2: Domínio de referência fixo (esquerda) e viga otimizada (direita).

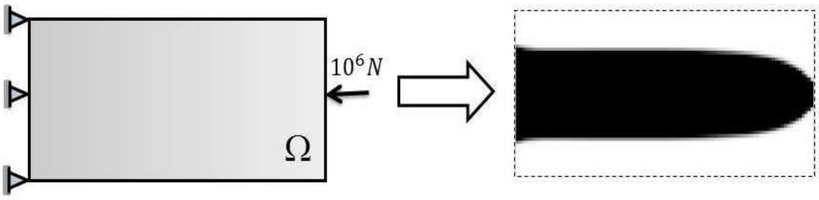

Figura 3: Simulação 3: Domínio de referência fixo (esquerda) e viga otimizada (direita).

4. CONCLUSÕES

Em todas as topologias ótimas obtidas foi possível verificar, comparando com resultados encontrados na literatura, a eficiência do método, mostrando assim como a otimização topológica pode ser aplicada na distribuição de material em vigas sujeitas a diferentes carregamentos e suportes. O resultado mostra que a otimização topológica contribui para a obtenção de estruturas com um menor volume e consequentemente mais leves e ágeis e com menor quantidade de material necessário para a sua fabricação.

AGRADECIMENTOS: Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENDSOE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, n. 2, p.197–224, 1988.

BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**, Springer-Verlag, v. 69, n. 9-10, p. 635-654, 1999.

BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: theory, methods and applications**. Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Hong Kong ; London ; Milan ; Paris ; Tokyo: Springer, 2003.

LIU, K.; TOVAR, A. An efficient 3D topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization,** Springer Berlin Heidelberg, v. 50, n. 6, p. 1175-1196, 2014.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, v.16, n. 1, p.68–75, 1998.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in matlab. **Structural Multidisciplinary Optimization**, v.21, n. 2, p.120–127, 2001.

SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 33, n. 4-5, p.401–424, 2007.